

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

### ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

### ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

18 ΜΑΪΟΥ 2016

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής.  
Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .

Μονάδες 7

**A2.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f, g$  λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[a, \beta]$ , τότε το  $\int_a^\beta f(t) dt = G(\alpha) - G(\beta)$ .

**β)** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**γ)** Κάθε συνάρτηση  $f$ , για την οποία ισχύει  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , είναι σταθερή στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ .

**δ)** Μια συνάρτηση  $f$  είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της, η εξίσωση  $y = f(x)$  έχει ακριβώς μια λύση ως προς  $x$ .

**ε)** Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[a, \beta]$  μια μέγιστη τιμή  $M$  και μια ελάχιστη τιμή  $m$ .

Μονάδες 10

#### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της  $f$ .

Μονάδες 6

- B2.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης  
**Μονάδες 9**
- B3.** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .  
**Μονάδες 7**
- B4.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **B1**, **B2**, **B3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .  
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)  
**Μονάδες 3**

### ΘΕΜΑ Γ

- Γ1.** Να λύσετε την εξίσωση  $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .  
**Μονάδες 4**
- Γ2.** Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που ικανοποιούν την σχέση  $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.  
**Μονάδες 8**
- Γ3.** Αν  $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι κυρτή.  
**Μονάδες 4**
- Γ4.** Αν  $f$  είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Γ3**, να λυθεί η εξίσωση:  
$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x)$$
όταν  $x \in [0, +\infty)$ .  
**Μονάδες 9**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση  $f$  ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta\mu x \, dx = \pi$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$
- $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- Δ1.** Να δείξετε ότι  $f(\pi) = \pi$  (μονάδες 4) και  $f'(0) = 1$  (μονάδες 3).  
**Μονάδες 7**
- Δ2.** **α)** Να δείξετε ότι η  $f$  δεν παρουσιάζει ακρότατα στο  $\mathbb{R}$ . (μονάδες 4)  
**β)** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ . (μονάδες 2)  
**Μονάδες 6**

Δ3. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι  $0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$

Μονάδες 6

ΑΓ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ - Γ. ΜΑΘΕΙΝ ΦΑΛΗΡΟ