ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ

κύριο ΦΟΥΝΤΟΥΛΑΚΗ ΜΑΡΙΟ

κύριο ΦΟΥΝΤΟΥΛΑΚΗ ΜΑΝΩΛΗ

του ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ

Όριον

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ: ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ ΑΜΑΡΓΙΑΝΑΚΗΣ

www.orionidef.gr

ΘΕΜΑ $1^{ο}$

Α. Απόδειξη από τη σελίδα 251 του σχολικού βιβλίου.

Β. Ορισμός στη σελίδα 213 του σχολικού βιβλίου.

Γ. **α.** $\rightarrow$ Σ
β. $\rightarrow$ Σ
γ. $\rightarrow$ Λ
δ. $\rightarrow$ Λ
ε. $\rightarrow$ Λ

ΘΕΜΑ $2^{ο}$

Α. **α.** Έστω $z = x + \psi i$, $x, \psi \in R$

Αφού εξ υποθέσεως $z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$, θα ισχύει:

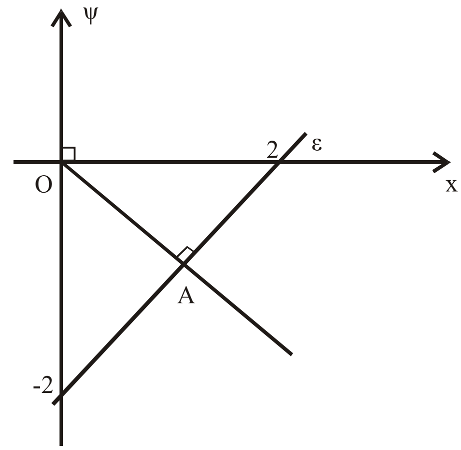
$$(\Sigma)\left.\begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ \psi = 2\lambda - 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = \dfrac{x-1}{2} \\ \psi = 2\dfrac{x-1}{2} - 1 \end{array}$$

Άρα $\psi = x - 2$, οπότε οι εικόνες των μιγαδικών z θα ανήκουν στην ευθεία ε: $\psi = x - 2$.

β. Έστω Α η εικόνα του ζητούμενου μιγαδικού.

Τότε $OA \perp \varepsilon$. Άρα $\lambda_{OA} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1$

$\lambda_{OA} \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OA} = -1$ και αφού $O(0,\ 0) \in OA$ η εξίσωση της ευθείας ΟΑ θα είναι $\psi = -x$.



Για να βρούμε την εικόνα Α του ζητούμενου μιγαδικού θα λύσουμε το (Σ) των εξισώσεων των ευθειών ε και ΟΑ

$$(\Sigma)\ \left.\begin{cases} \varepsilon: \psi = x - 2 \\ OA: \psi = -x \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ \psi = -1 \end{matrix}$$

Άρα ο ζητούμενος μιγαδικός θα είναι ο $z_0 = 1 - i$

Β. Έστω $w = x + \psi i$, $x,\ \psi \in R$

Εξ υποθέσεως ισχύει:

$$|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0$$

$$x^2 + \psi^2 + x - yi - 12 = 1 - i$$

$$\left(x^2 + \psi^2 + x - 12\right) - \psi i = 1 - i$$

Άρα $\left.\begin{cases} x^2 + \psi^2 + x - 12 = 1 \\ -\psi = -1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x^2 + 1 + x = 13 \\ \psi = 1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{cases} x^2 + x - 12 = 0 \\ \psi = 1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = -4 \text{ ή } x = 3 \\ \psi = 1 \end{matrix}$$

Άρα $w = -4 + i$ ή $w = 3 + i$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$ $\quad \alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$

Εξ υποθέσεως ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$.

Παρατηρούμε ότι $f(0) = \alpha^0 - \ln 1 = 1$

Άρα $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x > -1$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,\ +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = \alpha^x \ln a - \dfrac{1}{x+1}$, $x > -1$

Άρα υπάρχει το $f'(0)$ με $f'(0) = \ln a - 1$.

Το 0 είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος $(-1,\ +\infty)$ και εξ υποθέσεως η f παρουσιάζει στο 0 ακρότατο (ολικό ελάχιστο).

Άρα από θεώρημα Fermat θα ισχύει:
$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e$

Β. **α.** Αφού $\alpha = e \quad \Rightarrow f(x) = e^x - \ln(x+1),\ x > -1$

$f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x+1},\ x > -1$

$f''(x) = e^x + \dfrac{1}{(x+1)^2} \quad x > -1$

Αφού $f''(x) > 0$ για κάθε $x > -1$ η f θα είναι κυρτή στο $A_f = (-1,\ +\infty)$.

β. Αφού f κυρτή στο $A_f \Rightarrow$ $f'\uparrow\ /\ \ (-1,\ +\infty)$

Παρατηρούμε ότι $f'(0) = 0$

Άρα αν $x < 0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

ενώ αν $x > 0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Αφού $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,\ 0)$ και f συνεχής στο $(-1,\ 0]$
ως πράξη συνεχειών $f\downarrow\ /\ (-1,\ 0]$

Αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,\ +\infty)$ και f συνεχής στο $[0,\ +\infty)$
ως πράξη συνεχειών $f\uparrow\ /\ [0,\ +\infty)$

γ. Αφού $f\downarrow\ /\ (-1,\ 0]$ και $f\uparrow\ /\ [0,\ +\infty)$ η f θα παρουσιάζει στο $x_0 = 0$
ολικό ελάχιστο στο $f(0) = 1$.
Άρα για κάθε $x \in (-1,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$ θα ισχύει $f(x) > 1$ και αφού
$\beta, \gamma \in (-1,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$ θα ισχύουν:
$f(\beta) > 1 \Leftrightarrow f(\beta) - 1 > 0$ και $f(\gamma) > 1 \Leftrightarrow f(\gamma) - 1 > 0$
(E) $\dfrac{f(\beta)-1}{x-1} + \dfrac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0 \Rightarrow (x-2)\big(f(\beta)-1\big) + (x-1)\big(f(\gamma)-1\big) = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:
$g(x) = (x-2)\big(f(\beta)-1\big) + (x-1)\big(f(\gamma)-1\big) \qquad x \in R$

$$\left.\begin{array}{l} g(1) = -\left[f(\beta)-1\right] < 0 \\ g(2) = f(\gamma)-1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(1)g(2) < 0$$

Η g συνεχής στο [1, 2] ως πολυωνυμική.
Άρα από θεώρημα Bolzano θα υπάρχει:

$$x_0 \in (1,\ 2):\ g(x_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x_0-2)(f(\beta)-1)+(x_0-1)(f(\gamma)-1) = 0 \overset{x_0\neq 1 \text{ και } x_0\neq 2}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f(\beta)-1}{x_0-2}+\frac{f(\gamma)-1}{x_0-1} = 0$$

Άρα η δοθείσα εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1, 2).

ΘΕΜΑ 4ο

α. $$\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+t^2}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\ .$$

Άρα $G(0) = 6\cdot\frac{1}{2} = 3$

Άρα $G(x) = \begin{cases} \dfrac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3 & x\in(0,\ 2] \\ 3 & x = 0 \end{cases}$

όπου $H(x) = \int_0^x tf(t)dt \quad t\in[0,\ 2]$

Έστω $\varphi(t) = tf(t) \quad x\in[0,\ 2]$

Η φ είναι συνεχής στο [0, 2] και γινόμενο συνεχών .

Άρα η H είναι παραγωγίσιμη στο [0, 2] με παράγωγο $H'(x) = x\cdot f(x)$.

Έστω $K(x)=\int_0^x f(t)dt \quad x\in[0,\ 2]$

Άρα η f είναι συνεχής στο [0, 2], η K θα είναι παραγωγίσιμη στο [0, 2] με $K'(x)=f(x)$

Άρα η G είναι παραγωγίσιμη στο (0, 2] ως πράξη παραγωγίσιμων.
Άρα η G θα είναι και συνεχής στο (0, 2].

$$\lim_{x\to 0^+} G(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{H(x)}{x}-\int_0^x f(t)dt+3\right)=$$
$$=3+\lim_{x\to 0^+}\frac{H(x)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.L.H.}{=}}3+\lim_{x\to 0^+}\frac{H'(x)}{1}=$$
$$=3+\lim_{x\to 0^+}xf(x)=3+0\cdot f(0)=3=G(0)$$

αφού η f είναι συνεχής στο [0, 2] άρα και στο $x_0=0$.

Άρα η G είναι συνεχής και στο $x_0=0$, οπότε η G είναι συνεχής στο [0, 2].

β. Η G είναι παραγωγίσιμη στο (0, 2) ως πράξη παραγωγισίμων με

$$G'(x)=\left(\frac{H(x)}{x}\right)'-\left(\int_0^x f(t)dt\right)'+(3)'=$$
$$=\frac{H'(x)\cdot x-H(x)}{x^2}-f(x)=\frac{x^2f(x)-H(x)}{x^2}-f(x)=$$
$$=\frac{x^2f(x)}{x^2}-\frac{H(x)}{x^2}-f(x)=f(x)-\frac{H(x)}{x^2}-f(x)=$$
$$=-\frac{H(x)}{x^2}\ ,\quad 0<x<2$$

γ. Εξ υποθέσεως ισχύει:

$$\int_0^2 (t-2)f(t)dt=0\Leftrightarrow\int_0^2\big(tf(t)-2f(t)\big)dt=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\int_0^2 tf(t)dt-\int_0^2 2f(t)dt=0$$
$$\Leftrightarrow H(2)=2\int_0^2 f(t)dt \qquad (1)$$

$$G(2)=\frac{H(2)}{2}-\int_0^2 f(t)dt+3\overset{(1)}{=}\int_0^2 f(t)dt-\int_0^2 f(t)dt+3=3=G(0)$$

Η G συνεχής στο [0, 2] από α.
Η G παραγωγίσιμη στο (0, 2) από β.

Άρα από θεώρημα Rolle θα υπάρχει $\alpha\in(0,\ 2)$ τέτοιος ώστε

$$G'(\alpha)=0 \overset{\beta}{\Leftrightarrow} -\frac{H(\alpha)}{\alpha^2}=0 \Leftrightarrow H(\alpha)=0$$

δ. Αφού $\alpha\in(0,\ 2)\Rightarrow[0,\ \alpha]C[0,\ 2]$ και $(0,\ \alpha)C(0,\ 2)$

Αφού η G συνεχής στο [0, 2] $\Rightarrow$ G συνεχής στο [0, α]

Αφού η G παραγωγίσιμη στο (0, 2) $\Rightarrow$ G παραγωγίσιμη στο (0, α).

Άρα από Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση G στο [0, α] $\Rightarrow$

υπάρχει $\xi\in(0,\ \alpha): G'(\xi)=\dfrac{G(\alpha)-G(0)}{\alpha}$

$G(\alpha)=\dfrac{H(\alpha)}{\alpha}-\int_0^\alpha f(t)dt+3$, $\quad G(0)=3$ και $G'(\xi)=-\dfrac{H(\xi)}{\xi^2}$

Άρα ισχύει $-\dfrac{H(\xi)}{\xi^2}=\dfrac{H(\alpha)}{\alpha^2}-\dfrac{\int_0^\alpha f(t)dt}{\alpha}\overset{H(\alpha)=0}{\Leftrightarrow}$

$$\alpha H(\xi)=\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt \Leftrightarrow \alpha\int_0^y tf(t)dt=\xi^2\cdot\int_0^\alpha f(t)dt$$