ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΤΟΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗ

κύριο ΦΟΥΝΤΟΥΛΑΚΗ ΜΑΝΩΛΗ

του ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ

Όριον

www.orionidef.gr

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη στη σελίδα 260 – 261.

Α2. Ορισμός στη σελίδα 280.

Α3. **α** $\rightarrow \Sigma$
β $\rightarrow \Sigma$
γ $\rightarrow \Lambda$
δ $\rightarrow \Lambda$
ε $\rightarrow \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|z-3i|+|\overline{z}+3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|+|\overline{z-3i}|=2 \Leftrightarrow$

$|z-3i|+|z-3i|=2 \Leftrightarrow 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|=1$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο

$K(0,\ 3)$, ακτίνα $\rho=1$ και εξίσωση $C:\ x^2+(y-3)^2=1$

<u>β’ τρόπος</u>

$|z-3i|+|\overline{z}+3i|=2 \qquad z=x+yi,\ \ x,\ y\in R$

$$\left|x+(y-3)i\right|+\left|x+(3-y)i\right|=2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{x^2+(3-y)^2}=2 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x^2+(y-3)^2}=2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-3)^2}=1 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο

$K(0,\ 3)$ και ακτίνα $\rho=1$.

B2. $\left|z-3i\right|=1 \Leftrightarrow \left|z-3i\right|^2=1 \Leftrightarrow (z-3i)\left(\overline{z-3i}\right)=1 \Leftrightarrow$

$$(z-3i)(\overline{z}+3i)=1 \overset{z\neq 3i}{\Leftrightarrow} \overline{z}+3i=\frac{1}{z-3i}$$

B3. $w=z-3i+\dfrac{1}{z-3i} \overset{B2}{\Leftrightarrow} w=z-3i+\overline{z}+3i \Leftrightarrow$

$$w=z+\overline{z} \overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow} w=2x \quad \in R$$

$$x^2+(y-3)^2=1 \Leftrightarrow (y-3)^2=1-x^2$$

και επειδή $(y-3)^2 \geq 0$ θα είναι:

$$1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq w \leq 2$$

B4. Για $z=x+yi$ είναι $w=2x$

$$|z-w|=|z| \Leftrightarrow |x+yi-2x|=|x+yi| \Leftrightarrow$$

$$|-x+yi|=|x+yi| \Leftrightarrow \sqrt{(-x)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow$$

$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2}$ που ισχύει

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εξ υποθέσεως για κάθε $x\in R$ ισχύει:

$$e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)\Leftrightarrow$$

$$e^xf'(x)+e^xf''(x)-e^x=f'(x)+xf''(x)\Leftrightarrow$$

$$\left(e^x\right)'f'(x)+e^x\cdot\left(f'(x)\right)'-\left(e^x\right)'=x'\cdot f'(x)+x\left(f'(x)\right)'\Leftrightarrow$$

$$\left(e^xf'(x)\right)'-\left(e^x\right)'=\left(xf'(x)\right)'\Leftrightarrow$$

$$\left(e^xf'(x)-e^x\right)'=\left(xf'(x)\right)'\Leftrightarrow$$

$$e^xf'(x)-e^x=xf'(x)+c \qquad (1)$$

Για $x=0\overset{(1)}{\Rightarrow}f'(0)-1=c$ και αφού $f'(0)=0\Rightarrow c=-1$

Άρα $e^xf'(x)-e^x=xf'(x)-1\Leftrightarrow$

$$e^xf'(x)-xf'(x)=e^x-1\Leftrightarrow\left(e^x-x\right)\cdot f'(x)=e^x-1 \qquad (2)$$

Θα δείξουμε ότι $e^x-x\neq0$ για κάθε $x\in R$ και συγκεκριμένα ότι $e^x-x>0$ για κάθε $x\in R$.

Θέτουμε $t(x)=e^x-x\,/\,A_t=R \qquad t'(x)=e^x-1\,/\,A_{t'}=A_t=R$

$$t'(x)=0\Leftrightarrow e^x=e^0\overset{e^x\,1-1}{\Leftrightarrow}x=0$$

$$t'(x)>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>e^0\overset{e^x\uparrow\,/R}{\Leftrightarrow}x>0$$

$$t'(x)<0\Leftrightarrow e^x-1<0\Leftrightarrow e^x<e^0\overset{e^x\uparrow\,/R}{\Leftrightarrow}x<0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
t		$\searrow$	Ο.Λ.Ε.Λ.	$\nearrow$	

Άρα η t παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=0$ το $t(0)=1>0$.

Άρα $t(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

<u>Παρατήρηση:</u>
Θα μπορούσε η αντίστοιχη ανισότητα να λυθεί και με χρήση Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση $h(x)=e^x\,/R$ στο $[0,\ x]$ ή αποδεικνύοντας ότι η h είναι κυρτή στο R οπότε η C_h θα είναι πάνω από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο. Η εφαπτομένη της C_h στο $A(0,\ 1)$ έχει εξίσωση $\varepsilon:\ \psi=x+1$. Άρα για κάθε $x\in R$ ισχύει:

$$e^x\ge x+1\Leftrightarrow e^x-x\ge 1>0$$

Άρα $f'(x)\left(e^x-x\right)=e^x-1\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}\Leftrightarrow$

$$f'(x)=\frac{\left(e^x-x\right)'}{e^x-x}\Leftrightarrow f'(x)\left(\ln\left|e^x-x\right|\right)'\overset{e^x-x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$f'(x)=\left(\ln\left(e^x-x\right)\right)'\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(e^x-x\right)+c$$

Για $x=0$ έχουμε $f(0)=\ln 1+c=c$.

Αφού $f(0)=0\Rightarrow c=0$

Άρα $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x-1=0\Leftrightarrow e^x=e^0\overset{e^x\ 1-1}{\Leftrightarrow}x=0$$

$$f'(x)>0\overset{e^x-x>0}{\Leftrightarrow}e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>e^0\overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow}x>0$$

$$f'(x)<0 \overset{e^x-x>0}{\Leftrightarrow} e^x-1<0 \Leftrightarrow e^x<e^0 \overset{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} x<0$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)<0 \text{ για κάθε } x\in(-\infty,\ 0) \\ f \text{ συνεχής στο } (-\infty,\ 0] \end{array}\right\} \Rightarrow f \downarrow \quad (-\infty,\ 0]$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(0,\ +\infty) \\ f \text{ συνεχής στο } [0,\ +\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow f \uparrow \quad [0,\ +\infty)$$

Άρα η f παρουσιάζει στο $x_0=0$ ολικό ελάχιστο το $f(0)=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f′(x)		−	0	+	
f		$\searrow$	ΟΛ.ΕΛ. f(0) = 0	$\nearrow$	

Γ3. $$f''(x)=\left(\frac{e^x-1}{e^x-x}\right)'=\frac{(e^x-1)'(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-x)'}{(e^x-x)^2}=$$

$$=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)^2}{(e^x-x)^2}=\frac{e^{2x}-xe^x-e^{2x}+2e^x-1}{(e^x-x)^2}=\frac{-xe^x+2e^x-1}{(e^x-x)^2}$$

$(e^x-x)^2>0$ για κάθε $x\in R$

Θέτουμε $t(x)=-xe^x+2e^x-1 \ / \ A_t=R$

$$t'(x)=-e^x-xe^x+2e^x=e^x-xe^x=(1-x)\cdot e^x$$

$t'(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \qquad t'(x)>0 \Leftrightarrow x<1 \qquad t'(x)<0 \Leftrightarrow x>1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
t		$\nearrow$	ΟΛ.Μ.	$\searrow$	

Η t παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 1$ το $t(1) = e - 1 > 0$

$t(2) = -1 < 0$, $\quad t(-2) = \dfrac{4}{e^2} - 1 < 0$

Η t συνεχής στο R, άρα και στα διαστήματα $[-2,\ 1]$, $[1,\ 2]$

$t(-2)t(1) < 0$ και $t(1)t(2) < 0$

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχουν $x_1 \in (-2,\ 1)$ και $x_2 \in (1,\ 2)$ τέτοια ώστε $t(x_1) = t(x_2) = 0$

Η ύπαρξη των ριζών της t θα μπορούσε να εξασφαλιστεί και με χρήση συνόλου τιμών της t.

Αφού t $\uparrow$ / $(-\infty,\ 1]$, η (ε) $t(x) = 0$ θα έχει το πολύ μία ρίζα στο $(-\infty,\ 1)$.

Ομοίως t $\downarrow$ / $[1,\ +\infty)$, άρα η (ε) $t(x) = 0$ θα έχει το πολύ μία ρίζα στο $(1,\ \infty)$.

Άρα η (ε) $t(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες εκατέρωθεν των οποίων η t αλλάζει πρόσημο.

Αφού $f''(x) = \dfrac{t(x)}{(e^x - x)^2}$, η f θα έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Γ4. (ε) $\ln(e^x - x) = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \ln(e^x - x) - \sigma\upsilon\nu x = 0$.

Θέτουμε $\Phi(x) = \ln(e^x - x) - \sigma\upsilon\nu x$ / $A_\Phi = R$ ή $A_\Phi = \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$

Η Φ συνεχής στο $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ ως πράξη συνεχών

$\Phi(0) = \ln 1 - \sigma\upsilon\nu 0 = -1 < 0$

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\right)>0 \quad \text{αφού} \quad f(x)>0 \text{ για κάθε } x\in R^*$$

Άρα $\Phi(0)\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$, οπότε από Θεωρ. Bolzano υπάρχει: $x_0\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right):\Phi(x_0)=0$

Άρα η ζητούμενη (ε) έχει μία τουλάχιστο ρίζα στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$

Η Φ είναι παραγωγίσιμη στο A_Φ με:

$$\Phi'(x)=f'(x)+\eta\mu x$$

$$\left.\begin{array}{l}\Phi'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right] \\ \Phi \text{ συνεχής στο } \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]\end{array}\right\} \Rightarrow \Phi\uparrow \ / \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

Άρα η (ε) $\Phi(x)=0$ θα έχει το πολύ μία ρίζα στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$,

οπότε τελικά η ζητούμενη (ε) θα έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε $u=x+t\Leftrightarrow t=u-x$ και $dt=du$

Για $t=0\Leftrightarrow u=x$, για $t=-x\Leftrightarrow u=0$

Άρα $\displaystyle\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt=\int_x^0\frac{e^{2(u-x)}}{g(u)}du=\int_x^0\frac{e^{2u-2x}}{g(u)}du=$

$$=\int_0^x\frac{e^{2u}\cdot e^{-2x}}{g(u)}du=-e^{-2x}\cdot\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du\ .$$

Άρα η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=-e^{-2x}\cdot\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}du \Leftrightarrow 1-f(x)=-\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}du \Leftrightarrow$$

$$f(x)=1+\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}du$$

Θέτουμε $h(u)=\dfrac{e^{2u}}{g(u)}$ / $Ah=R$.

Η h είναι συνεχής στο R ως πηλίκο συνεχών.

Άρα η συνάρτηση f θα είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=\dfrac{e^{2x}}{g(x)}$.

Αντίστοιχα και η g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x)=\dfrac{e^{2x}}{f(x)}$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{e^{2x}}{g(x)} \Leftrightarrow e^{2x}=g(x)\cdot f'(x) \\ g'(x)=\dfrac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow e^{2x}=f(x)\cdot g'(x) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$f'(x)g(x)=f(x)g'(x) \overset{f(x)>0,\ g(x)>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)} \overset{f(x)>0,\ g(x)>0}{\Leftrightarrow} \left(\ln(f(x))\right)'=\left(\ln(g(x))\right)' \Leftrightarrow$$

$$\ln(f(x))=\ln(g(x))+c \qquad (1)$$

Στις δοθείσες σχέσεις για $x=0$ προκύπτουν:

$$\frac{1-f(0)}{e^0}=1 \Leftrightarrow f(0)=1 \text{ και } \frac{1-g(0)}{e^0}=1 \Leftrightarrow g(0)=1$$

Για $x=0 \overset{(1)}{\rightarrow} \ln 1+\ln 1=c \Leftrightarrow c=0$

Άρα $\ln(f(x))=\ln(g(x)) \overset{\ln x\ 1-1}{\Leftrightarrow} f(x)=g(x)$

β’ τρόπος

Ομοίως $f'(x)\cdot g(x)=f(x)g'(x)\Leftrightarrow f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=0$

$$\overset{g(x)>0\Rightarrow g(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}\ \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=0\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0\Leftrightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=c\Leftrightarrow f(x)=c\cdot g(x)$$

Ομοίως για $x=0$ έχομε: $\left.\begin{array}{l} f(0)=g(0)=1\\ f(0)=c\cdot g(0)\end{array}\right|\Rightarrow c=1$

Άρα $f(x)=g(x)$

Δ2. $\left.\begin{array}{l} f'(x)\cdot g(x)=e^{2x}\\ f(x)=g(x)\end{array}\right|\Rightarrow f'(x)\cdot f(x)=e^{2x}\Leftrightarrow$

$$2f'(x)f(x)=2e^{2x}\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)'$$

Άρα $f^2(x)=e^{2x}+c \qquad (1)$

$\left.\begin{array}{r} \text{Για } x=0\overset{(1)}{\rightarrow}f^2(0)=1+c\\ \text{Αφού } f(0)=1\end{array}\right|\Rightarrow c=0$

Άρα $f^2(x)=e^{2x}\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}f(x)=e^x$

Δ3. Θέτουμε $u=\dfrac{1}{x}$. Αφού $x\to 0^-\Rightarrow u\to-\infty$

Άρα $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{u\to-\infty}\frac{\ln f\left(\frac{1}{u}\right)}{f(u)}=\lim_{u\to-\infty}\frac{\ln e^{\frac{1}{u}}}{e^u}=$

$$= \lim_{u\to-\infty} \frac{\frac{1}{u}}{e^u} = \lim_{u\to-\infty} \frac{1}{u\cdot e^u} = \lim_{u\to-\infty} \frac{e^{-u}}{u} \overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{\underset{PLH}{=}}$$

$$= \lim_{u\to-\infty} \frac{\left(e^{-u}\right)'}{(u)'} = \lim_{u\to-\infty}\left(-e^{-u}\right) = -\infty$$

Δ4. Αφού η f είναι συνεχής στο R, η F θα είναι παραγωγίσιμη στο R με $F'(x) = f\left(x^2\right)$,

αφού και η $g(t) = f\left(t^2\right)$ θα είναι συνεχής στο R ως σύνθεση συνεχών.

Αφού η F είναι παραγωγίσιμη στο R θα είναι και συνεχής. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν

θα ισούται με $E = \int_0^1 |F(x)|dx$.

Αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ θα ισχύει $F(x) \le 0$ στο $[0,\ 1]$.

Άρα $E = \int_0^1 -F(x)dx = -\int_0^1 F(x)dx = -\int_0^1 x'\cdot F(x)dx =$

$= -\left[x\cdot F(x)\right]_0^1 + \int_0^1 x\cdot F'(x)dx = -F(1) + \int_0^1 xf\left(x^2\right)dx =$

$= -0 + \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x\cdot e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left(e^{x^2}\right)'dx =$

$= \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$ τ.μ.