**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΤΟΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗ

**κύριο ΦΟΥΝΤΟΥΛΑΚΗ ΜΑΝΩΛΗ**

του ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ

Όριον

www.orionidef.gr

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Απόδειξη στη σελ. 152

**Α2.** Ορισμός στη σελ. 142

**Α3.** Ορισμοί στη σελ. 65

**Α4.** **α)** $\rightarrow$ Λ
**β)** $\rightarrow$ Λ
**γ)** $\rightarrow$ Σ
**δ)** $\rightarrow$ Λ
**ε)** $\rightarrow$ Σ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** $P(M)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{N(M)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow N(\Omega)=4N(M)$

$$64 < N(\Omega) < 72 \Leftrightarrow 64 < 4N(M) < 72 \Leftrightarrow 16 < N(M) < 18$$

και επειδή $N(M) \in \mathbb{N}$ είναι $N(M)=17$

**Β2.** $P(A)+P(K)+P(M)=1 \Leftrightarrow$

$$4\lambda^2-5\lambda+\frac{7}{4}+\frac{1}{4}=1 \Leftrightarrow 4\lambda^2-5\lambda+1=0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 25 - 16 = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 \pm 3}{8} \begin{cases} \frac{8}{8} = 1 \\ \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Για $\lambda = 1$ είναι $P(K) = -5 + \frac{7}{4} = -\frac{13}{4} < 0$ απορ.

Για $\lambda = \frac{1}{4}$ είναι $P(A) = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad \in [0,\ 1]$

$$P(K) = -5 \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \in [0,\ 1]$$

Άρα $\lambda = \frac{1}{4}$

**B3.** $P(A) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{N(A)}{68} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow N(A) = 17$

$P(M) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{N(M)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow N(M) = 17$

$P(K) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{N(M)}{N(\Omega)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{N(M)}{68} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow N(M) = 34$

Άρα υπάρχουν στο κουτί 17 άσπρες, 17 μαύρες και 34 κόκκινες σφαίρες.

**B4.** Αφού $A \cap M = \varnothing$ ισχύει $P(A \cup M) = P(A) + P(M) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

ή

$A \cup M = K'$ οπότε $P(A \cup M) = P(K') = 1 - P(K) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Επειδή το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα είναι $y_\Delta = y_E$ οπότε $f_3\% = f_4\%$.

$$f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100$$

$$10 + 20 + f_3\% + f_3\% + 10 = 100$$

$$2f_3\% = 60 \Leftrightarrow f_3\% = 30 \quad \text{και} \quad f_4\% = 30$$

Άρα $y_\Delta = y_E = 30$

__β’ τρόπος__

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i \Leftrightarrow 14,2 = 10 \cdot 0,1 + 12 \cdot 0,2 + 14 \cdot f_3 + 16 \cdot f_4 + 18 \cdot 0,1 \Leftrightarrow$$

$$14,2 = 14 \cdot f_3 + 16 \cdot f_4 + 5,2 \Leftrightarrow 14f_3 + 16f_4 = 9$$

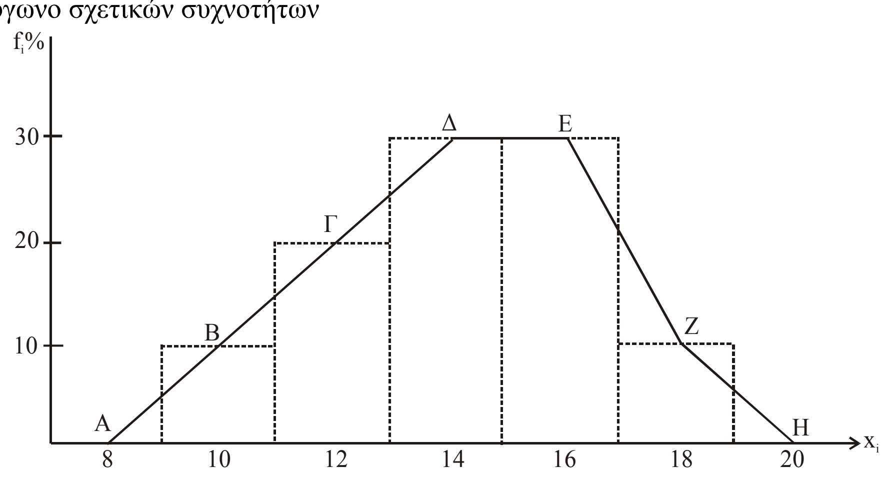
και

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Leftrightarrow 0,1 + 0,2 + f_3 + f_4 + 0,1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$f_3 + f_4 = 0,6$$

$$\left.\begin{array}{l} 14f_3 + 16f_4 = 9 \\ f_3 + f_4 = 0,6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f_3 = 0,3 \\ f_4 = 0,3 \end{array} \quad \text{άρα} \quad \begin{array}{l} f_3\% = 30 \\ f_4\% = 30 \end{array}$$

**Γ2.** Πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων



**Γ3.** $c = 10 - 8 = 2$ και $\frac{c}{2} = 1$ άρα οι κλάσεις είναι:

$[9,\ 11),\ [11,\ 13),\ [13,\ 15),\ [15,\ 17),\ [17,\ 19]$

| κλάση | $x_i$ | $f_i\%$ |
|---|---|---|
| 9 – 11 | 10 | 10 |
| 11 – 13 | 12 | 20 |
| 13 – 15 | 14 | 30 |
| 15 – 17 | 16 | 30 |
| 17 - 19 | 18 | 10 |
| | | 100 |

**Γ4.** Το ποσοστό των πωλητών με πωλήσεις τουλάχιστον 15 χιλ. € είναι

$f_4\% + f_5\% = 30 + 10 = 40$

Άρα το 40% θα πάρει επιπλέον ποσό.

**Γ5.** Επειδή το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον άξονα x΄x είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος είναι $v = 80$

$$f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow v_i = f_i v \Leftrightarrow v_i = 0,4 \cdot 80 \Leftrightarrow v_i = 32$$

Άρα 32 πωλητές δικαιούνται το εφάπαξ ποσό.

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** $f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x}, \quad x \in R$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$f'(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x} \cdot \left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}\right) \qquad x \in R$$

$e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x} > 0$ για κάθε $x \in R$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}=0 \Leftrightarrow 15x^2-11x+2=0$$

$$\Delta=(-11)^2-4\cdot 15\cdot 2=121-120=1>0$$

$$x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{1}}{2\cdot 15}=\frac{11\pm 1}{30} \begin{array}{l} \nearrow x_1=\dfrac{11-1}{30}=\dfrac{1}{3} \\ \searrow x_2=\dfrac{11+1}{30}=\dfrac{12}{30}=\dfrac{2}{5} \end{array}$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}>0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{3} \text{ ή } x>\frac{2}{5}$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}<0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<\frac{2}{5}$$

| x | -∞ | | 1/3 | | 2/5 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f΄(x) | | + | 0 | – | 0 | + | |
| f | | ↗ | Τ.Μ. | ↘ | Τ.ΕΛ. | ↗ | |

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\left(-\infty,\ \dfrac{1}{3}\right) \\ \quad f \text{ συνεχής στο } \left(-\infty,\ \dfrac{1}{3}\right] \end{array}\right\} \Rightarrow f \uparrow \quad \left|\left(-\infty,\ \frac{1}{3}\right]\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)<0 \text{ για κάθε } x\in\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{5}\right) \\ \quad f \text{ συνεχής στο } \left[\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{5}\right] \end{array}\right\} \Rightarrow f \downarrow \quad \left|\left[\frac{1}{3},\ \frac{2}{5}\right]\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\left(\dfrac{2}{5},\ +\infty\right) \\ \quad f \text{ συνεχής στο } \left[\dfrac{2}{5},\ +\infty\right) \end{array}\right\} \Rightarrow f \uparrow \quad \left|\left[\frac{2}{5},\ +\infty\right)\right.$$

**Δ2.** Αφού $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B)$ και επίσης ισχύουν $A \cap B = A$ και $A \cup B = B$

Αφού η f παρουσιάζει ακρότατα στο σημείο με τετμημένες $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{5}$ και $\frac{1}{3} < \frac{2}{5}$ θα ισχύουν $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(B) = \frac{2}{5}$.

Άρα $P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(A \cup B) = P(B) = \frac{2}{5}$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) = 0$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

**Δ3. α)** $f(x) = h(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} = e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)}$

$$\overset{e^x\ \text{"1-1"}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$5x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) = 3x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$x\left(5x^2 - \frac{11}{2}x + 2\right) - x\left(\frac{9x^2}{2} - 3x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x\left(5x^2 - \frac{11}{10}x + 2 - \frac{9x^2}{2} + 3x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 5x + 6\right) = 0$$

$x = 0$

ή

$x^2 - 5x + 6 = 0$ : $x = 2$ ή $x = 3$

**β.** Αφού $x_1 < x_2 < x_3$ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, θα ισχύει: $x_1 = 0$ , $x_2 = 2$ , $x_3 = 3$

Άρα $v_1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ , $v_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ , $v_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

$$\overline{x} = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{3} v_i x_i = \frac{1}{13}\left(0 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7\right) = \frac{31}{13}$$