ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ

κύριο ΦΟΥΝΤΟΥΛΑΚΗ ΜΑΡΙΟ

κύριο ΦΟΥΝΤΟΥΛΑΚΗ ΜΑΝΩΛΗ

του ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ

Όριον

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ: ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ ΑΜΑΡΓΙΑΝΑΚΗΣ

www.orionidef.gr

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη στη σελίδα 304.

Α2. Ορισμός στη σελίδα 279.

Α3. Ορισμός στη σελίδα 273.

Α4. **α.** $\to \Sigma$
β. $\to \Sigma$
γ. $\to \Lambda$
δ. $\to \Lambda$
ε. $\to \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $z+\frac{2}{z}=2\,,\quad z\neq 0$

$$z^2+2=2z \Leftrightarrow z^2-2z+2=0$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-2\right)^2-4\cdot 1\cdot 2=4-8=-4$$

$$z_{1,2}=\frac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}=\frac{2\pm i\sqrt{4}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i \begin{cases} z_1=1+i \\ z_2=1-i \end{cases}$$

B2. $z_1^{2010}+z_2^{2010}=(1+i)^{2010}+(1-i)^{2010}=\left[(1+i)^2\right]^{1005}+\left[(1-i)^2\right]^{1005}=$

$=(1+2i-1)^{1005}+(1-2i-1)^{1005}=(2i)^{1005}+(-2i)^{1005}=$

$=2^{1005}\cdot i^{1005}-2^{1005}\cdot i^{1005}=0$

B3. $|w-4+3i|=|z_1-z_2|\Leftrightarrow|w-4+3i|=|(1+i)-(1-i)|\Leftrightarrow$

$|w-4+3i|=|1+i-1+i|\Leftrightarrow|w-4+3i|=|2i|\Leftrightarrow$

$|w-4+3i|=2\Leftrightarrow|w-(4-3i)|=2$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι κύκλος με κέντρο $K(4,\ -3)$ και ακτίνα $\rho=2$, η εξίσωση του οποίου είναι:

$$C_1:(x-4)^2+(y+3)^2=4$$

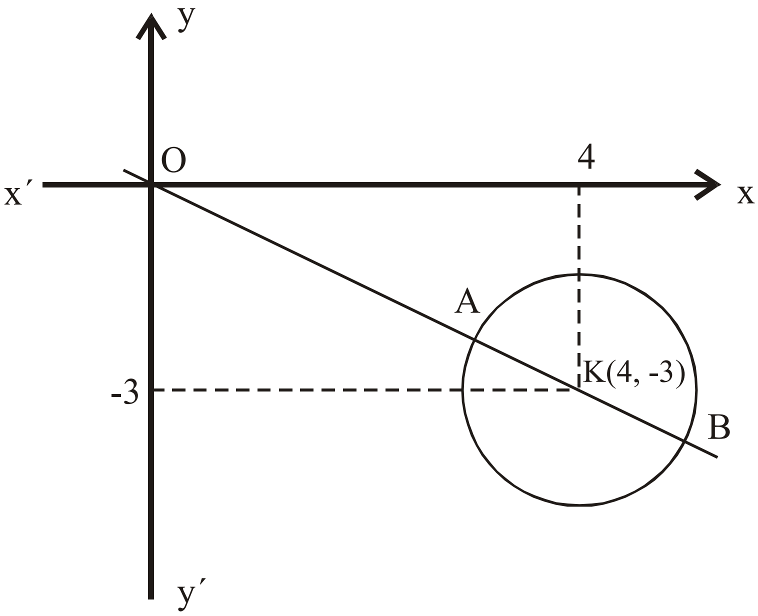
B4. $\big||w|-|4+3i|\big|\le|w-(4-3i)|\le|w|+|4-3i|\Leftrightarrow$

$\left||w|-\sqrt{4^2+(-3)^2}\right|\le 2\le|w|+\sqrt{4^2+(-3)^2}\Leftrightarrow$

$\big||w|-5\big|\le 2\le|w|+5$

Άρα $\big||w|-5\big|\le 2\Leftrightarrow -2\le|w|-5\le 2\Leftrightarrow 3\le|w|\le 7$

ή



Το $|w|$ αντιστοιχεί στην απόσταση της εικόνας του w, δηλαδή των σημείων του κύκλου από την αρχή των αξόνων.

$(OK)=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=5$

$|w|_{min}=(OA)=(OK)-\rho=5-2=3$

$|w|_{max}=(OB)=(OK)+\rho=5+2=7$

Άρα $3\le|w|\le 7$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x)=2x+\ln(x^2+1),\ \ x\in R$

$$f'(x)=2+\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'=2+\frac{1}{x^2+1}2x=2+\frac{2x}{x^2+1}=$$

$$=\frac{2(x^2+1)+2x}{x^2+1}=\frac{2x^2+2x+2}{x^2+1}=\frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1}$$

$x^2+x+1\to\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1-4=-3<0$, $\alpha=1>0$, άρα $x^2+x+1>0$ για κάθε $x\in R$ και $x^2+1>0$, οπότε $f'(x)>0$

και f συνεχής στο R, οπότε f γνησίως αύξουσα στο R.

Γ2. $2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\Leftrightarrow$

$2x^2-2(3x-2)=\ln\left((3x-2)^2+1\right)-\ln\left(x^4+1\right)\Leftrightarrow$

$2x^2+\ln\left(x^4+1\right)=2(3x-2)+\ln\left((3x-2)^2+1\right)\Leftrightarrow f\left(x^2\right)=f(3x-2)$

$f\uparrow$ και συνεχής στο R, άρα f "1 – 1", οπότε $x^2-3x+2=0$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=9-8=1$

$x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{3\pm1}{2}$, άρα $x=2$ ή $x=1$

Γ3. $f''(x)=2\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)'=2\dfrac{(2x+1)\left(x^2+1\right)-\left(x^2+x+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^2}=$

$=2\dfrac{2x^3+2x+x^2+1-2x^3-2x^2-2x}{\left(x^2+1\right)^2}=2\dfrac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow 2\dfrac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow -x^2+1=0\Leftrightarrow x=\pm1$

$f''(x)>0\Leftrightarrow 2\dfrac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}>0\Leftrightarrow -x^2+1>0\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow -1<x<1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f''		-	0	+	0	-	
f		$\frown$	ΣΚ	$\smile$	ΣΚ	$\frown$	

$f(-1)=-2+\ln2$ άρα σημείο καμπής $A(-1,\ -2+\ln2)$

$f(1)=2+\ln 2$ άρα σημείο καμπής $B(1,\ 2+\ln 2)$

$$f'(-1)=\frac{2(1-1+1)}{2}=1$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο A είναι:

$$y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\Leftrightarrow y+2-\ln 2=1(x+1)\Leftrightarrow$$

$$y=x-1+\ln 2 \quad (\varepsilon_A)$$

$$f(1)=\frac{2\cdot(1+1+1)}{2}=3$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο B είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-2-\ln 2=3(x-1)\Leftrightarrow$$

$$y-2-\ln 2=3x-3\Leftrightarrow y=3x-1+\ln 2 \quad (\varepsilon_B)$$

$$\left.\begin{array}{l} y=x-1+\ln 2 \\ y=3x-1+\ln 2 \end{array}\right\}\Rightarrow 3x-1+\ln 2=x-1+\ln 2\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$$

$$y=-1+\ln 2$$

Άρα οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία καμπής A και B τέμνονται στο σημείο $\Gamma(0,\ -1+\ln 2)$ του άξονα $y'y$.

Γ4. $I=\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}x\left[2x+\ln\left(x^2+1\right)\right]dx=\int_{-1}^{1}2x^2+x\ln\left(x^2+1\right)dx$

$$=\int_{-1}^{1}2x^2dx+\int_{-1}^{1}x\ln\left(x^2+1\right)dx$$

- $\int_{-1}^{1}2x^2dx=2\int_{-1}^{1}x^2dx=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=2\left(\frac{1}{3}-\frac{-1}{3}\right)=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

- Για το $\int_{-1}^{1}x\ln\left(x^2+1\right)dx$ θέτουμε $x^2+1=u$, άρα $2xdx=du$

$$\Leftrightarrow x\cdot dx=\frac{1}{2}du \text{ και για } x=-1\Rightarrow u=2\text{ , για } x=1\Rightarrow u=2$$

άρα $\int_{-1}^{1}x\ln\left(x^2+1\right)dx=\frac{1}{2}\int_{2}^{2}\ln u du=0$

ή $\int_{-1}^{1}x\ln\left(x^2+1\right)dx=\int_{2}^{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)'\cdot\ln\left(x^2+1\right)dx=$

$$\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{x}\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 2\right)-\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{2}\frac{1}{x^2+1}\cdot 2xdx=$$

$$=-\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{x^2+1}dx= \qquad \begin{array}{r|l} x^3 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^3-x & x \\ -x & \end{array}$$

$$=-\int_{-1}^{1}\frac{\left(x^2+1\right)x-x}{x^2+1}dx=-\int_{-1}^{1}\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=-\int_{-1}^{1}xdx+\int_{-1}^{1}\frac{x}{x^2+1}dx=-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\ln 2\right)=0$$

ή

$$\int_{-1}^{1}x\cdot\ln\left(x^2+1\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)'\cdot\ln\left(x^2+1\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(x^2+1\right)\cdot\ln\left(x^2+1\right)\right]_{-1}^{1}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)\cdot\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\ln 2-2\ln 2\right)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)\frac{1}{x^2+1}2xdx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}2xdx$$

$$=-\frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-1}^{1}=-\frac{1}{2}(1-1)=0$$

Άρα $I=\frac{4}{3}+0=\frac{4}{3}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=x+3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$

Θέτουμε $h(t)=\frac{t}{f(t)-t}$ με π.ο. $A_h=R$ αφού $f(t)\neq t$ για κάθε $t\in R$

Η h είναι συνεχής στο R ως πηλίκο συνεχών.

Άρα η συνάρτηση $f_2(x)=\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο

$$f_2'(x)=\frac{x}{f(x)-x}$$

Η συνάρτηση $f_1(x)=x+3$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με $f_1'(x)=1$

$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, άρα f παραγωγίσιμη στο R ως άθροισμα παραγωγίσιμων με

$$f'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)=1+\frac{x}{f(x)-x}=\frac{f(x)-x+x}{f(x)-x}=\frac{f(x)}{f(x)-x}$$

Δ2. Για να δείξουμε ότι η g είναι σταθερή στο R πρέπει και αρκεί να δείξουμε ότι $g'(x)=0$ για κάθε $x\in R$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο R ως διαφορά παραγωγίσιμων με

$$g'(x)=2f(x)\cdot f'(x)-2f(x)-2xf'(x)=2f'(x)\big(f(x)-x\big)-2f(x)=$$

$$=2\frac{f(x)}{f(x)-x}\left(f(x)-x\right)-2f(x)=2f(x)-2f(x)=0\,.$$

Άρα η g είναι σταθερή.

Δ3. Αφού $g(x)=c$ για κάθε $x\in R$ και $g(0)=\left(f(0)\right)^2-2\cdot 0\cdot f(0)=3^2=9$,

θα ισχύει $g(x)=9$ για κάθε $x\in R$.

Άρα $\left(f(x)\right)^2-2xf(x)=9$

__**β' τρόπος**__

Ισχύει $f'(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)-x}\Leftrightarrow f'(x)\cdot f(x)-xf'(x)=f(x)\Leftrightarrow$

$$f'(x)\cdot f(x)=xf'(x)+(x)'\cdot f(x)\Leftrightarrow\left(\frac{f^2(x)}{2}\right)'=\left(xf(x)\right)'\Leftrightarrow$$

$\dfrac{f^2(x)}{2}=x\cdot f(x)+c$ για κάθε $x\in R$.

Για $x=0$ $\quad\dfrac{f^2(0)}{2}=0\cdot f(0)+c\Leftrightarrow\dfrac{9}{2}=c$

Άρα $\dfrac{f^2(x)}{2}=xf(x)+\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow f'(x)=2xf(x)+9\Leftrightarrow$

$f^2(x)-2xf(x)=9$ για κάθε $x\in R$

$$f^2(x)-2xf(x)=9\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+9\Leftrightarrow\left(f(x)-x\right)^2=x^2+9$$

Και αφού η συνάρτηση $f(x)-x$ είναι συνεχής στο R ως διαφορά συνεχών, θα ισχύει:

$f(x)-x=\sqrt{x^2+9}\quad$ ή $\quad f(x)-x=-\sqrt{x^2+9}$

$f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$ ή $f(x)=x-\sqrt{x^2+9}$

$f(0)=3$ δεκτή $\qquad f(0)=-3$ απορ.

Άρα $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$

β' τρόπος

$f^2(x)-2xf(x)-9=0$

$\Delta=(-2x)^2-4(-9)=4x^2+36=4(x^2+9)$ για κάθε $x\in R$

$$f(x)=\frac{2x\pm\sqrt{4(x^2+9)}}{2}=x\pm\sqrt{x^2+9}$$

Αφού f συνεχής στο R και $f(0)=3\Rightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$

Δ4. $\int_x^{x+1}f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2}f(t)dt\Leftrightarrow$

$\int_\alpha^{x+1}f(t)dt-\int_\alpha^{x}f(t)dt<\int_\alpha^{x+2}f(t)dt-\int_\alpha^{x+1}f(t)dt\Leftrightarrow$

$$\frac{\int_\alpha^{x+1}f(t)dt-\int_\alpha^{x}f(t)dt}{(x+1)-x}<\frac{\int_\alpha^{x+2}f(t)dt-\int_\alpha^{x+1}f(t)dt}{(x+2)-(x+1)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\int_\alpha^x f(t)dt,\quad x\in R$

Αφού η f είναι συνεχής στο R, η h είναι παραγωγίσιμη στο R με $h'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$.

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

Από Θ.Μ.Τ. για την h στο $[x,x+1]$ θα υπάρχει $\xi_1\in(x,x+1)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi_1)=\frac{h(x+1)-h(x)}{(x+1)-x}=\int_\alpha^{x+1}f(t)dt-\int_\alpha^{x}f(t)dt=\int_x^{x+1}f(t)dt$$

Από Θ.Μ.Τ. για την h στο $\left[x+1, x+2\right]$ θα υπάρχει $\xi_2 \in \left(x+1, x+2\right)$, τέτοιο ώστε

$$h'\left(\xi_2\right) = \frac{h\left(x+2\right) - h\left(x+1\right)}{\left(x+2\right) - \left(x+1\right)} = \int_{\alpha}^{x+2} f\left(t\right)dt - \int_{\alpha}^{x+1} f\left(t\right)dt = \int_{x+1}^{x+2} f\left(t\right)dt$$

$h'\left(x\right) = f\left(x\right)$ για κάθε $x \in R$

$$h''\left(x\right) = f'\left(x\right) = \left(x + \sqrt{x^2+9}\right)' = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}}, \quad x \in R$$

- Αν $x \geq 0$ τότε $\sqrt{x^2+9} + x > 0$ και $\sqrt{x^2+9} > 0$ άρα $f'\left(x\right) > 0$

- Αν $x < 0$ τότε $\sqrt{x^2+9} + x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9} > -x \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+9}\right)^2 > \left(-x\right)^2 \Leftrightarrow$

  $x^2 + 9 > x^2 \Leftrightarrow 9 > 0$ ισχύει και $\sqrt{x^2+9} > 0$ άρα $f'\left(x\right) > 0$

Άρα $f'\left(x\right) > 0$ για κάθε $x \in R$. Άρα $f \uparrow$ στο R.

$$x < \xi_1 < x+1 < \xi_2 < x+2 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(\xi_1\right) < f\left(\xi_2\right) \Leftrightarrow h'\left(\xi_1\right) < h'\left(\xi_2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{x}^{x+1} f\left(t\right)dt < \int_{x+1}^{x+2} f\left(t\right)dt$$