ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ

κύριο ΦΟΥΝΤΟΥΛΑΚΗ ΜΑΡΙΟ

κύριο ΦΟΥΝΤΟΥΛΑΚΗ ΜΑΝΩΛΗ

του ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ

Όριον

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ: ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ ΑΜΑΡΓΙΑΝΑΚΗΣ

www.orionidef.gr

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη στη σελ. 93

Α2. Ορισμός στη σελ. 87

Α3. Ορισμοί στη σελ. 140

Α4. **α.** $\rightarrow$ Σ
β. $\rightarrow$ Λ
γ. $\rightarrow$ Σ
δ. $\rightarrow$ Λ
ε. $\rightarrow$ Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x^2-x+1}-1-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2\left[\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2-1\right]}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2\left(x^2-x\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x\,\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{\sqrt{x^2-x+1}+1}=\frac{2}{1+1}=1$$

B2. $f'(x)=\left(2\sqrt{x^2-x+1}-1\right)'=\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2-x+1}}\left(x^2-x+1\right)'=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο $x_0=0$ είναι $f'(0)=\frac{-1}{\sqrt{1}}=-1$

B3. $\varepsilon\varphi\omega=\lambda=f'(0)=-1$, άρα $\omega=\frac{3\pi}{4}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η πρώτη κλάση είναι $[a,\ a+c]$ και η δεύτερη $[a+c,\ a+2c]$, άρα $a=0$

και $\frac{a+c+a+2c}{2}=6\Leftrightarrow 2a+3c=12\overset{a=0}{\Leftrightarrow}3c=12\Leftrightarrow c=4$

Γ2.

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ v_i	$x_i v_i$	$x_i-\overline{x}$	$\left(x_i-\overline{x}\right)^2$	$\left(x_i-\overline{x}\right)^2 v_i$
[0 – 4)	2	20	40	–8	64	1280
[4 – 8)	6	40	240	–4	16	640
[8 – 12)	10	45	450	0	0	0
[12 – 16)	14	30	420	4	16	480
[16 – 20)	18	25	450	8	64	1600
ΣΥΝΟΛΟ		160	1600			4000

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{\kappa}x_i v_i}{v}=\frac{1600}{160}=10$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 v_i}{v} = \frac{4000}{160} = 25$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{25} = 5$$

Γ3. $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$, άρα δεν είναι ομοιογενές.

Γ4. Κατά την ομαδοποίηση των παρατηρήσεων, θεωρούμε ότι τα στατιστικά δεδομένα κατανέμονται ομοιόμορφα σε κάθε κλάση. Στην κλάση [4, 8) αντιστοιχούν 40 άτομα, άρα κατ' αναλογία στο τμήμα της [7, 8) θα αντιστοιχούν 10 άτομα.

Στην κλάση [12, 16) αντιστοιχούν 30 άτομα, άρα στο τμήμα της [12, 14] αντιστοιχούν 15 άτομα.

Οπότε, $10 + 45 + 15 = 70$ άτομα είχαν απώλεια βάρους από 7 μέχρι και 14 κιλά.

Επειδή κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί για να υπολογίσουμε την πιθανότητα, χρησιμοποιούμε τον κλασικό ορισμό:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{70}{160} = \frac{7}{16}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = \ln\left(x - P(A)\right) - \frac{1}{2}\left(x - P(A)\right)^2 + P(B),\ x > P(A)$

$$f'(x) = \frac{1}{x - P(A)}\left(x - P(A)\right)' - \frac{1}{2}2\left(x - P(A)\right)\left(x - P(A)\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{x - P(A)} - \left(x - P(A)\right) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1 - \left[x - P(A)\right]^2}{x - P(A)},\quad x > P(A)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \left[x - P(A)\right]^2}{x - P(A)} = 0 \Leftrightarrow 1 - \left(x - P(A)\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x - P(A)\right)^2 = 1 \overset{x > P(A)}{\Leftrightarrow} x - P(A) = 1 \Leftrightarrow x = 1 + P(A)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-(x-P(A))^2}{x-P(A)} > 0 \overset{x>P(A)}{\Leftrightarrow} 1-(x-P(A))^2 > 0$$

$$(x-P(A))^2 < 1 \overset{x>P(A)}{\Leftrightarrow} x-P(A) < 1 \Leftrightarrow x < 1+P(A)$$

x	P(A)		1+P(A)		+∞
f′		+	0	−	
f		↗	Ολ. Μεγ.	↘	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(P(A),\ 1+P(A)\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[1+P(A),\ +\infty\right)$.

Παρουσιάζει για $x = 1+P(A)$ ολικό μέγιστο

$$f(1+P(A)) = \ln 1 - \frac{1}{2}1^2 + P(B) = P(B) = \frac{1}{2}$$

Δ2. Επειδή η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1+P(A)$ είναι

$1+P(A) = \frac{5}{3} \Leftrightarrow P(A) = \frac{2}{3}$ και η τιμή του ακρότατου είναι

$f(1+P(A)) = P(B) - \frac{1}{2}$, άρα $P(B) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}$

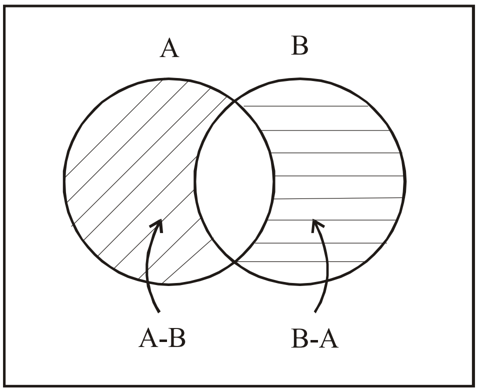
Δ3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

άρα $P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{4+3-5}{6} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3}$

Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα Α, Β αντιστοιχεί στο $(A \cap B)'$.

$$P\left((A \cap B)'\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Δ4. Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α, Β αντιστοιχεί στο $(A-B)\cup(B-A)$



$(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$, οπότε από τον απλό προσθετικό νόμο

$P((A-B)\cup(B-A))=P(A-B)+P(B-A)=$

$P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=$

$=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$